SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

PROBLEMI CON CONDIZIONI LATERALI DI TIPO MISTO PER EQUAZIONI PARABOLICHE
II PARTE

1° APRILE 1982

Nel precedente seminario ([7]) sono stati descritti alcuni risultati di esistenza, unicità e regolarità della soluzione per problemi parabolici con condizioni laterali di tipo misto sotto l'ipotesi che la superficie di separazione dei dati non sia mai tangente ad un iperpiano t = cost. Ci proponiamo ora di illustrare come si possano trattare problemi in cui la superficie di separazione è tangente ad un iperpiano t = cost., utilizzando ancora spazi di Sobolev dissimmetrici a regolarità variabile modellati sulla geometria della superficie di separazione.

Più precisamente, consideriamo la seguente situazione.

Siano Ω un aperto limitato di R^n con frontiera C^∞, localmente da una sola parte del suo bordo $\partial\Omega$, e T un numero reale positivo fissato. Poniamo $Q =]0,T] \times \Omega$, $\Gamma =]0,T] \times \partial\Omega$. Sia poi Γ_1 un sottoinsieme connesso e relativamente aperto di $\overline{\Gamma}$ con frontiera γ tale che:

i) γ è una varietà C^∞ di dimensione $n-1$, connessa, con bordo $\partial\gamma$;

ii) $\partial\gamma = \gamma \quad (\{T\} \times \partial\Omega)$;

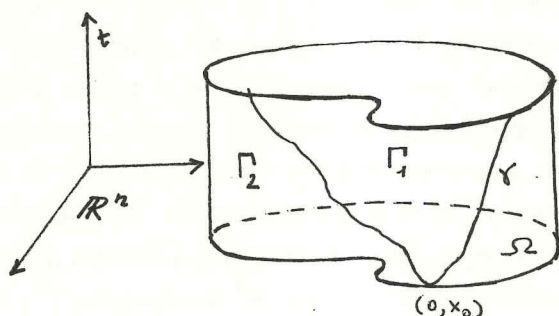
iii) esiste uno ed un solo punto $(0, x_0) \in \gamma$, $x_0 \in \partial\Omega$, tale che il piano tangente a γ in questo punto è parallelo all'iperpiano $t = 0$;

iv) γ e il suo piano tangente in $(0,x_0)$ hanno un contatto di ordine esattamente uno.

Poniamo infine $\Gamma_2 = \overline{\Gamma} \setminus \overline{\Gamma}_1$.

Sia ora $P(t,x,\partial_x)$ un operatore lineare ellittico del secondo ordine a coefficienti C^∞ e reali. Il problema considerato è il seguente:

$$(P) \quad \begin{cases} (\partial_t - P(t,x,\partial_x))u = f \text{ in } Q, \\ E_i(t,x,\partial_x)u = g_i \text{ in } \Gamma_i,\ i = 1,2, \\ u(0,x) = 0 \quad \text{ in } \Omega, \end{cases}$$

dove gli operatori E_1 ed E_2 sono due tra i seguenti: l'operatore di Dirichlet, quello di Neumann e quello di Robin; inoltre non sono neces sariamente distinti. Indichiamo con k_i l'ordine di E_i, $i = 1,2$.

Nel seguito, verrà considerato il caso $n \geq 3$; analogamente a quanto si verifica nel caso ellittico e nel caso parabolico di [7], il caso $n = 2$ si ottiene con alcune semplici modifiche.

Per tutte le notazioni non definite, si vedano, inoltre, [3] e [7].

1. LOCALIZZAZIONE VICINO AL PUNTO CARATTERISTICO

Consideriamo dapprima il problema (P) in uno strato sufficientemente piccolo $]0,\delta^{(o)}] \times \Omega = Q^{(o)}$. Per le nostre ipotesi, il problema sulla rimanente regione $Q \setminus Q^{(o)}$ sarà del tipo di quello considerato in [7]; sarà però necessario modificare in parte la tecnica per consentire un "buon raccordo" tra gli spazi costruiti in $Q^{(o)}$ e quelli costruiti in $Q \setminus Q^{(o)}$.

Fissiamo un intorno $S(x_0, 2\eta^{(o)})$ in $\overline{\Omega}$ dal punto x_0 in modo che:

α_0) $\gamma \cap ([0,\delta^{(o)}] \times S(x_0, 2\eta^{(o)}))$ è il grafico di una funzione reale C^∞ definita su un sottoinsieme di $\partial\Omega$;

α_1) esiste un diffeomorfismo C^∞ $h : \overline{\Omega} \cap S(x_0, 2\eta^{(o)}) \to U^{(o)} \subseteq \{y \in R^n;$ $|y| \leq 1,\ y_n \geq 0\}$ tale che $h(x_0) = 0$ e y_n è la distanza da $\partial\Omega$;

α_2) in $h(\partial\Omega \cap S(x_0, 2\eta^{(o)})$ esiste un cambiamento di variabili C^∞ $y' = \chi(z')$ tale che l'immagine di $\gamma \cap ([0,\delta^{(o)}] \times S(x_0, 2\eta^{(o)}))$ attraverso $\Lambda = (1_t \otimes \chi \otimes 1_{z_n})^{-1} \circ (1_t \otimes h) = 1_t \otimes \psi$ è contenuta nel paraboloide $t = |z'|^2$, $z_n = 0$ (questo è possibile per il lemma di Morse e per la ipotesi iv)).

Per fissare le idee, supponiamo che $\Lambda(\Gamma_1 \cap ([0,\delta^{(o)}] \times \partial\Omega)) \subseteq \{(t,z',0) \in R^{n+1},\ t > |z'|^2\}$.

Verrà posta successivamente una ulteriore condizione α_3) che limita superiormente $\delta^{(o)}$ (cfr. § 5).

Sia poi $\{\phi_1^{(o)}, \phi_2^{(o)}\}$ una partizione dell'unità in $\overline{\Omega}$ subordinata al ricoprimento $\{S(x_0, 2\eta^{(o)}) \cap \overline{\Omega},\ \overline{\Omega} \setminus \overline{S(x_0, \eta^{(o)})}\}$ e siano $\psi_1^{(o)}$, $\psi_2^{(o)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ due funzioni tali che:

$$0 \leq \psi_i^{(o)} \leq 1, \quad \psi_i^{(o)}\ \phi_i^{(o)} = \phi_i^{(o)}, \quad i = 1,2,$$

$$\text{supp}\ \psi_1^{(o)} \subseteq \overline{\Omega} \cap S(x_0, 2\eta^{(o)}), \ \text{supp}\ \psi_2^{(o)} \subseteq \overline{\Omega} \setminus \overline{S(x_0, \eta^{(o)})}.$$

Indichiamo ora con A l'operatore associato al problema (P) e scriviamo l'operatore $\psi_1^{(o)}\ A\ \phi_1^{(o)}$ nelle coordinate locali definite da Λ^{-1}; indichiamolo con $\psi_1^{(o)'}\ A_1'\ \phi_1^{(o)'}$, dove $\psi_1^{(o)'} = \psi_1^{(o)} \circ \Lambda^{-1}$, $\phi_1^{(o)'} = \phi_1^{(o)} \circ \Lambda^{-1}$ e A_1' è un operatore parabolico in $R_+ \times R_+^n$ con coefficienti opportunamente prolungati con costanti fuori da un compatto.

2. IL PROBLEMA A COEFFICIENTI COSTANTI IN UN SEMISPAZIO I

Costruiamo ora una opportuna scala di spazi funzionali dove, utilizzando una tecnica di localizzazione e incollamento "alla Agranovič e Višik" ([1]), è possibile invertire l'operatore A_1'. A tal fine, supponiamo dapprima che l'operatore A_1' sia omogeneo e a coefficienti costanti; consideriamo cioè il problema

$$(P^*) \quad \begin{cases} (\partial_t - L(\partial_z))u = F \text{ in } R_+ \times R^n_+ , \\ B_1 u = G_1 \quad \text{se } z_n = 0, \ |z'|^2 < t, \\ B_2 u = G_2 \quad \text{se } z_n = 0, \ |z'|^2 > t, \\ u(0,z) = 0 \quad \text{in } R^n_+, \end{cases}$$

dove $L(\partial_z)$ è un operatore ellittico omogeneo del secondo ordine a coefficienti costanti, B_i è l'operatore di Neumann o quello di Dirichlet, ord $B_i = k_i$, $i = 1,2$.

Sia poi $T : R_+ \times R^n_+ \to R \times R^n_+$ il seguente cambiamento di variabili (cfr. [6]):

$$T : (t,z) \to (\tau,\omega) , \qquad \tau = -\frac{1}{2} \log t , \qquad \omega = t^{-\frac{1}{2}} z.$$

Ponendo $u \circ T^{-1} = v$, $F \circ T^{-1} = -e^{2\tau} F$, $G_i \circ T^{-1} = e^{k_i\tau} G_i$, $i = 1,2$, il problema (P^*) si trasforma nel problema

$$(P^*) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\partial_\tau + \omega\cdot\nabla_\omega)v + L(\partial_\omega)v = F \quad \text{in } R \times R^n_+ , \\ B_1 v = G_1 \quad \text{se } \omega_n = 0, \ |\omega'| < 1, \\ B_2 v = G_2 \quad \text{se } \omega_n = 0, \ |\omega'| > 1. \end{cases}$$

Il problema (P^*) è un problema con condizioni laterali di tipo misto e superficie di separazione cilindrica; è possibile quindi utiliz-

zare le tecniche già viste in [7]. Non è possibile però utilizzarne direttamente i risultati per la presenza del termine $\omega\cdot\nabla_\omega$ in R^n_+ che proviene dalla singolarità di T nella origine e non è quindi eliminabile.

Con una trasformazione di Laplace bilatera il problema (P^*) si trasforma nel seguente problema ellittico dipendente da un parametro.

$$(P^*_q)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(q^2 + \omega\cdot\nabla_\omega)\tilde{v} + L(\partial_\omega)\tilde{v} = \tilde{F} & \text{in } R^n_+ , \\ B_1\tilde{v} = \tilde{G}_1 \quad \text{se} \quad \omega_n = 0 , & |\omega'| < 1 , \\ B_2\tilde{v} = \tilde{G}_2 \quad \text{se} \quad \omega_n = 0 , & |\omega'| > 1 . \end{cases}$$

Osserviamo che il problema al contorno (P^*_q) è un problema misto al finito (dove il termine $\omega\cdot\nabla_\omega$ è irrilevante), mentre all'infinito è un ordinario problema al contorno per un operatore ellittico a coefficienti polinomiali. Gli spazi per questo problema si otterranno incollando gli spazi già studiati per il problema misto al finito con spazi modellati sull'operatore $L(\partial_\omega) + \frac{1}{2}(q^2 + \omega\cdot\nabla_\omega)$ all'infinito; analogamente si costruirà un inverso per l'operatore associato al problema (P^*_q).

Occorre dunque preliminarmente descrivere alcuni risultati relativi agli operatori ellittici a coefficienti polinomiali del tipo di quello in (P^*_q) e ai relativi spazi funzionali.

3. PROBLEMI AL CONTORNO IN UN SEMISPAZIO PER OPERATORI ELLITTICI CONTENENTI IL TERMINE $\omega\cdot\nabla_\omega$ ([5])

Definizione 3.1. Se $m \in N \cup \{0\}$, poniamo

$$M^o_q(R^n) = L^2(R^n),\ ((u))_o = \| u;\ L^2(R^n)\| ,$$

$$M^{2m+2}_q(R^n) = \mathcal{D}_{M^{2m}_q}(1-\Delta) \cap \mathcal{D}_{M^{2m}_q}(q^2 + \omega\cdot\nabla_\omega) ,$$

$$((u))^2_{2m+2} = (((1-\Delta)u))^2_{2m} + (((q^2+\omega\cdot\nabla_\omega)u))^2_{2m} + ((u))^2_{2m} ,$$

dove $\mathcal{D}_{M_q^{2m}}(B)$ denota il dominio di B in $M_q^{2m}(R^n)$. Inoltre, se $s \in]0,1[$, poniamo $M_q^{2m+2s}(R^n) = \mathcal{D}_{M_q^{2m}}((1-\Delta)^s) \cap \mathcal{D}_{M_q^{2m}}((q^2+\omega\cdot\nabla_\omega)^s)$, normato analogamente al caso intero (si può verificare che, se Re $q^2 \leq 0$ ed è sufficientemente grande in modulo, le potenze frazionarie utilizzate sono correttamente definite).

Gli spazi $M_q^s(R^n_+)$ sono definiti come spazi quoziente. Osserviamo infine che è possibile dimostrare che gli spazi M_q^s costituiscono una scala di spazi di interpolazione. Abbiamo inoltre il seguente Teorema di tracce:

<u>Teorema 3.2</u>. Siano $s > p + \frac{1}{2}$, γ_k l'operatore di traccia di ordine k su $\omega_n = 0$; allora l'applicazione $u \to (\gamma_0 u, \dots, \gamma_p u)$ è continua da

$$M_q^s(R^n_+) \text{ su } \mathop{X}_{j=0}^{p} M_q^{s-\frac{1}{2}-j}(R^{n-1}),$$

ed ha norma uniformemente limitata in q. Inoltre esiste un rilevamento continuo che gode della stessa proprietà.

Enunciamo ora il risultato che ci interessa per lo studio del problema $(\mathcal{P}^*_q)$.

<u>Teorema 3.3</u> (cfr. [5], Teor. 3.2). Siano $s \geq 2$ e Re $q^2 \leq q_0 < 0$, q_0 opportuno. Allora l'operatore

$$L = (\tfrac{1}{2}(q^2 + \omega\cdot\nabla_\omega) + L(\partial_\omega)) \oplus B_2)$$

è un isomorfismo da $M_q^s(\overline{R_+^n})$ su $M_q^s(R_+^n) \times M_q^{s-k_2-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$.

Di più la sua norma e quella del suo inverso sono uniformemente limitate in q.

Per la dimostrazione si procede nel modo seguente: con opportune integrazioni per parti, si ottiene una stima a priori per s = 2; successivamente per induzione e per interpolazione si ottengono stime a priori per L che assicurano la chiusura del codominio.

Per provare la densità del codominio (e quindi la suriettività di L), si ricorre ad un cambiamento della funzione incognita. Procediamo in questo modo:

siano $f_o \in C_o^\infty(\overline{R_+^n})$, $g_o \in C_o^\infty(R^{n-1})$ e denotiamo con K la matrice dei coefficienti di L; ponendo allora $v = e^{\langle K^{-1}\omega,\omega\rangle/4}u$, il problema $Lu = (f_o, g_o)$ si trasforma nel problema

$$L^{\#}v = ((L(\partial_\omega) - \frac{1}{4} \langle K^{-1}\omega,\omega\rangle - (1 + n/2 - q^2)) \oplus E_2)\, v =$$

$$= (e^{\langle K^{-1}\omega,\omega\rangle/4} f_o,\ e^{\langle K^{-1}(\omega',0),(\omega',0)\rangle/4} g_o) = (f_o^{\#}, g_o^{\#}).$$

Ora, $f_o^{\#} \in C_o^\infty(\overline{R_+^n})$, $g_o^{\#} \in C_o^\infty(R^{n-1})$ e l'operatore $L^{\#}$ è l'operatore associato ad un problema al contorno per un operatore ellittico a coefficienti polinomiali che è ellittico nella coppia di variabili (x,ξ). Per tali operatori esiste un'ampia trattazione (si veda, ad esempio, [8]); in particolare, per il Teorema 4.2 di [4], il problema $L^{\#}v = (f_o^{\#}, g_o^{\#})$ ha una soluzione in $S(\overline{R_+^n})$ e quindi $Lu = (f_o, g_o)$ ha una soluzione in $M_q^s(R_+^n)$, $\forall$ s $\geq$ 2.

4. IL PROBLEMA A COEFFICIENTI COSTANTI IN UN SEMISPAZIO. II

Definizione 4.1. Nel seguito, sia $S = \{(\omega',o) \in R^n, |\omega'| = 1\}$.
Sia $\{\phi_1,\dots,\phi_m\}$ una partizione dell'unità in $\overline{R^n_+}$ tale che

a) $\mathrm{supp}\,\phi_j \cap S \neq \emptyset$ se $j = 2,\dots,m' < m$, $\mathrm{supp}\,\phi_j \cap S = \emptyset$ se $j = 1$ o $j = m'+1,\dots,m$;

b) $\phi_j \in C^\infty_o(\overline{R^n_+})$, $j = 2,\dots,m$.

Inoltre, sia W un fissato intorno di S in $\overline{R^n_+}$ tale che:

c) $\overline{W} \cap \mathrm{supp}\,\phi_1 = \emptyset$ e

d) se $\mathrm{supp}\,\phi_j \cap C_W \neq \emptyset$ e $\mathrm{supp}\,\phi_j \cap (R^{n-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$, allora $\mathrm{supp}\,\phi_j \cap C_W \cap (R^{n-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$, $j = 2,\dots,m$.

Sia ora V_j un intorno di $U_j = \mathrm{supp}\,\phi_j (j = 2,\dots,m')$ tale che su V_j sia definito un cambiamento di variabili h_j che muta $V_j \cap \overline{R^n_+}$ in $\overline{R^n_+}$ e $V_j \cap (R^{n-1} \times \{0\})$ in $R^{n-1} \times \{0\}$ lasciando invariata la n-ma coordinata e tale che, se $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ sono le nuove coordinate, η_{n-1} è la distanza (con segno) tra la proiezione sul piano $\omega_n = 0$ del punto originale e S. Indichiamo con S_j il relativo operatore sulle funzioni. Se poi $j = m'+1,\dots,m$, poniamo $S_j = I$.

Scegliamo $\omega_{(j)} \in U_j$ in modo che:

e) se $U_j \cap S \neq \emptyset$, allora $\omega_{(j)} \in S$;

f) se $U_j \cap (R^{n-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$ e $U_j \cap S = \emptyset$, allora $\omega_{(j)} \in R^{n-1} \times \{0\}$;

g) se $U_j \nsubseteq W$ e $U_j \cap W \neq \emptyset$, allora $\omega_{(j)} \notin W$.

Siano infine $q \in C, s, l : \overline{R^n_+} \to R$ funzioni continue tali che $s/_{C_W} \equiv s(\omega_{(1)})$, $l/_{C_W} \equiv 0$ e poniamo

$$s_j = s(\omega_{(j)}), \quad l_j = l(\omega_{(j)}), \quad j = 1,\dots,m.$$

Indichiamo allora con $M^q_{(s,-1,l)}(R^n_+)$ lo spazio delle funzioni u tali che:

$$((u))^2_{(s,-1,1)} = ((\phi_1 u))^2_{s_1} + \sum_{j=2}^{n} |||S_j \, \phi_j u|||^2_{s_j,-1_j,1_j} < +\infty \quad (*)$$

dove le norme $|||\cdot|||_{s_j,-1_j,1_j}$ sono calcolate in R^n_+ quando

$U_j \cap (R^{n-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$.

Supporremmo inoltre

h) $|s_j - s_k| < 1/4$, $|1_j - 1_k| < 1/4$ se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $j,k = 1,\dots,m$.

Gli spazi di bordo sono definiti in modo analogo.

Osserviamo inoltre che l'operatore γ_k di traccia di ordine k è continuo da $M^q_{(s,-1,1)}(R^n_+)$ a $M^q_{(s-1-k-\frac{1}{2},1)}(R^{n-1})$.

Si ha allora:

<u>Teorema 4.2</u>. Siano $q \in C$, $s \geq 2$, $1 \geq 0$, L^*_q l'operatore associato al problema (P^*_q). Se Re $q^2 \leq q_1 < 0$, L^*_q è un isomorfismo tra $M^q_{(s,-1,1)}(R^n_+)$ e

$$M^q_{(s-2,-1,1)}(R^n_+) \times M^q_{(s-1-k_1-\frac{1}{2},1)}(\{(\omega',o),\ |\omega'| < 1\}) \times$$

$$\times M^q_{(s-1-k_2-\frac{1}{2},1)}(\{(\omega',o),\ |\omega'| > 1\}) \text{ se risulta}$$

$$(k_1 + k_2)/2 < s_j - 1_j < (k_1 + k_2)/2 + 1 \quad \text{se } j = 2,\dots,m'.$$

Di più le norme di L^*_q e di $(L^*_q)^{-1}$ sono uniformemente limitate in q.

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 2.1 di [3].

(*) La norma $|||\cdot|||_{s,-1,1}$ sono quelle che in [3] e in [7] sono indicate con $[\cdot]_{s,-1,1}$.

Osserviamo infatti che, sul supporto di ϕ_k, $k > 1$, la norma in $M^s_q(R^n_+)$ è equivalente ad una norma di Sobolev $H^s(R^n_+)$ e quindi ad una norma $H_{s,0,0}(R^n_+)$.

Risulta a questo punto naturale la seguente

Definizione 4.3. Indichiamo con $M_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(R_+ \times R^n_+)$ lo spazio delle funzioni u per le quali risulta

$$(u)^{*2}_{(s/2;s,-1,1);\gamma} = \int_R (((\widehat{u \circ T^{-1}})(\gamma+i\sigma,\cdot)))^2_{(s,-1,1)} \, d\sigma < +\infty .$$

Gli spazi M su $]0,\delta] \times R^n_+$ sono definiti per restrizione.

Osserviamo che si tratta di spazi a regolarità variabile con un peso temporale di tipo potenza sul piano $t = 0$, peso che proviene dal fatto che il cambiamento di variabili T è singolare nell'origine. Fuori da un intorno dal paraboloide $z_n = 0$, $|z'|^2 = t$, gli spazi M sono ordinari spazi di Sobolev parabolici con un peso a $t = 0$; a mano a mano che ci si avvicina al paraboloide, la regolarità decresce nelle direzioni non tangenti al paraboloide stesso. Una più esplicita caratterizzazione degli spazi "lontano dal paraboloide" verrà data più oltre (§ 6) quando questi spazi andranno raccordati "lontano dal punto caratteristico".

Gli spazi di bordo, infine, sono definiti in modo analogo ed esistono naturali teoremi di traccia.

Osserviamo che, nel seguito, la presenza del parametro γ nella definizione degli spazi avrà un ruolo essenziale nelle tecniche di localizzazione; a tal fine saranno utilizzati i tre risultati seguenti:

Proposizione 4.4. i) Sia $s \geq 1$; allora l'applicazione $u \to \partial_{z_j} u$ è continua da $M_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(R_+ \times R^n_+)$ a $M_{(s/2-1/2;s-1,-1,1);\gamma+1}(R_+ \times R^n_+)$, $j = 1,\dots,n$;

ii) sia $s \geq 2$; allora l'applicazione $u \to \partial_t u$ è contina da $M_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(R_+ \times R^n_+)$ a $M_{(S/2-1;s-2,-1,1);\gamma+2}(R_+ \times R^n_+)$.

Proposizione 4.5. Sia $\alpha \in S(R \times R^n)$; allora $\exists C_0 > 0$, $C_\alpha > 0$ tali che,

$$\forall \delta > 0, \forall u \in M_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(]0,\delta] \times R^n_+) ,$$

$$(\alpha u)^*_{(s/2;s,-1,1);\gamma} \leq C_0 (\sup_{]0,\delta] \times R^n_+} |\alpha| + C_\alpha \delta^{\frac{1}{2}})(u)^*_{(s/2;s,-1,1);\gamma} .$$

Proposizione 4.6. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$(u)^*_{(s/2;s,-1,1);\gamma+1} \leq \varepsilon(u)^*_{(s/2;s,-1,1);\gamma}$$

$\delta \leq \delta_\varepsilon$ se le norme sono calcolate in $]0,\delta] \times R^n_+$.

Ripetendo a ritroso le considerazioni che hanno portato dal problema (P*) al problema (P^*_q), dal Teorema 4.2 si ottiene il seguente risultato.

Teorema 4.7. Siano $s,l : \overline{R^n_+} \to [0,+\infty[$ soddisfacienti le ipotesi del Teorema 4.2,

$$F \in M_{(s/2-1;s-2,-1,1);\gamma+2}(R_+ \times R^n_+) ,$$

$$G_i \in M_{((s-k_i-\frac{1}{2})/2;s-1-k_i-\frac{1}{2},1);\gamma+k_i}(R_+ \times R^{n-1}) ,$$

$i = 1,2.$

Allora $\exists \gamma_0 \in R$ tale che, se $\gamma \leq \gamma_0$, il problema (P*) ha una ed

una sola soluzione in $M_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(R_+ \times R^n_+)$ e di più sussistono le naturali stime a priori.

Un analogo risultato sussiste in $]0,\delta] \times R^n_+$ con costanti nella stima a priori uniformemente limitate rispetto a δ in un intorno compatto dell'origine.

5. IL PROBLEMA LOCALIZZATO VICINO AL PUNTO CARATTERISTICO

Formuliamo ora l'ulteriore condizione su $\eta^{(o)}$ e $\delta^{(o)}$.

α_3) Scegliamo $\delta^{(o)}$ tale che

$$(T \circ \Lambda)^{-1} \left([-\frac{1}{2}\log 2\delta^{(o)}, +\infty[\times (\bigcup_{j=2}^{m} U_j)\right) \subseteq$$

$$\subseteq]0,2\delta^{(o)}] \times S(x_o,\eta^{(o)}) .$$

Vedremo più avanti l'opportunità di questa scelta.

Proviamo ora che A_1' è invertibile tra

$$M_{(s/2;s,-1,1);\gamma}(]0,\delta^{(o)}] \times R^n_+) \text{ e}$$

$$M_{(s/2-1;s-2,-1,1);\gamma}(]0,\delta^{(o)}] \times R^n_+) \times$$

$$\times \left(\mathop{X}_{i=1}^{2} M_{((s-k_i-\frac{1}{2})/2;s-k_i-1-\frac{1}{2},1),\gamma+k_i}(]0, \delta^{(o)}] \times R^n_+)\right).$$

A tal fine, osserviamo preliminarmente che sussistono risultati analoghi al Teorema 1.7 per il problema all'interno e per il problema al contorno non misto (cioè con un solo operatore di bordo). La dimostrazione è analoga.

Sia ora $\{\rho_j, j = 0,\dots,N\}$ una partizione dell'unità C^∞ in $\overline{R^n_+}$ tale che $\rho_j \in C^\infty_o(\overline{R^n_+})$, $j = 1,\dots,N$. Siamo $\{\sigma_j, j = 0,\dots,N\}$, $\{\chi_j, j = 0,\dots,N\}$ due insiemi di funzioni C^∞ tali che χ_j, $\sigma_j \in C^\infty_o(\overline{R^n_+})$, $j = 1,\dots,N$, $0 \leq \chi_j \leq 1$, $0 \leq \sigma_j \leq 1$, $\sigma_j\, \rho_j = \rho_j$, $\chi_j\, \sigma_j = \sigma_j$, $j = 0,\dots,N$. Sia $z_j \in \in \operatorname{supp} \rho_j$, $j = 0,\dots,N$. Denotiamo con $A'_{1(o)}$ la parte principale parabolica di A'_1; abbiamo allora

$$\sigma_j\, A'_1 = \sigma_j(A'_{1(o)j} + K'_{1j} + T'_{1j}), \quad j = 0,\dots,N$$

(qui $A'_{1(o)j}$ è l'operatore $A'_{1(o)}$ con i coefficienti congelati nel punto $(0,z_j)$ e che contiene due, uno o nessun operatore di bordo a seconda che $]0,\delta^{(o)}] \times \operatorname{supp} \rho_j$ intersechi $\Lambda(\gamma)$, intersechi $z_n = 0$ ma non $\Lambda(\gamma)$ o sia contenuto in $z_n > 0$), $\sigma_j\, K'_{1j} = \sigma_j(A'_{1(o)} - A'_{1(o)j})$, $\sigma_j\, T'_{1j} = \sigma_j(A'_1 - A'_{1(o)})$, $j = 0,\dots,N$. Possiamo pensare che K'_{1j} e T'_{1j} siano definiti su tutto lo spazio.

Per il Teorema 4.7 e per quanto osservato precedentemente, $A'_{1(o)j}$ ha un inverso $R'_{1(o)j}$ che è continuo tra gli spazi tra i quali naturalmente opera, con norma indipendente dall'altezza del cilindro. Consideriamo ora, ad esempio, la "componente di equazione differenziale" P'_{1j} di K'_{1j}. Analogamente, se è necessario, si trattano le altre componenti. Abbiamo (le norme sono calcolate in $]0,\delta^{(o)}] \times R^n_+$):

$$(\chi_j\, P'_{1j}(t,z,\partial_z)v)^*_{(s/2-1;s-2,-1,1);\gamma+2} \leq$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|=2} (\chi_j\, a'_{\alpha j}(t,z)\partial^\alpha_z\, v)^*_{(s/2-1;s-2,-1,1);\gamma+2} ,$$

dove gli $a'_{\alpha j}$ sono i coefficienti di P'_{1j}. Così, per le Proposizioni 4.5 e 4.4, stringendo il supporto di χ_j (e quindi anche $\operatorname{supp} \sigma_j$ e $\operatorname{supp} \rho_j$), se $\delta^{(o)}$ è sufficientemente piccolo, l'ultima norma scritta si maggiora con $\varepsilon(v)^*_{(s/2;s,-1,1);\gamma}$.

Sempre per le Proposizioni 4.4, 4.5 e 4.6, una stima analoga vale per T'_{1j}, purché $\delta^{(o)}$ sia sufficientemente piccolo, in quanto T'_{1j} contiene solo termini di ordine inferiore a due. In questo modo $A'_{1(o)j} + X_j K'_{1j} + \chi_j T'_{1j}$ ha a sua volta un inverso continuo R'_{1j}.

Sia ora $\Phi = (f', g'_1, g'_2)$ appartenente allo "spazio dei dati", e poniamo

$$\overline{R}'_1 \Phi = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j R'_{1j} \rho_j \Phi \text{ ; abbiamo}$$

$$A'_1 \overline{R}'_1 \Phi = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j A'_1 R'_{1j} \rho_j \Phi + \sum_{j=1}^{N} [\sigma_j, A'_1] R'_{1j} \rho_j \Phi = \Phi + \mathcal{B}\Phi.$$

Osserviamo ora che $[\sigma_j, A'_1]$ è un operatore di ordine al più uno; quindi, applicando ancora le Proposizioni 4.4, 4.5 e 4.6, la norma di $\mathcal{B}$ può essere resa piccola purché $\delta^{(o)}$ sia sufficientemente piccolo. Risulta così $A'_1 \overline{R}'_1$ è invertibile. Analogamente, anche $\overline{R}'_1 A'_1$ ha un inverso continuo; ne segue che

$$\overline{R}'_1 (A'_1 \overline{R}'_1)^{-1} \quad \text{e} \quad (\overline{R}'_1 A'_1)^{-1} \overline{R}'_1$$

sono un inverso destro e sinistro, rispettivamente, di A'_1.

6. IL PROBLEMA (P) NELLO STRATO $Q^{(o)}$

Vogliamo ora costruire degli spazi "naturali" su $Q^{(o)}$. Questi spazi coincideranno in $]0,\delta^{(o)}] \times S(x_o, \eta^{(o)})$ con le immagini degli spazi M attraverso Λ^{-1}, mentre, su $]0,\delta^{(o)}] \times (\overline{\Omega} \setminus S(x_o, 2\eta^{(o)}))$ (dove il problema, per l'ipotesi α_3), è un ordinario problema al contorno) saranno spazi di Sobolev parabolici con un peso a $t = 0$ (per raccordarli con i primi).

Per giustificare la successiva definizione, premettiamo alcune considerazioni.

Sia $v \in C^{\infty}(Q^{(o)})$ tale che supp $u \subseteq]0,\delta^{(o)}] \times ((\bar{\Omega} \cap S(x_o,2\eta^{(o)}))\setminus S(x_o,\eta^{(o)}))$. Per α_3), risulta:

$$(u \circ \Lambda^{-1})^{*2}_{(s/2;s,-1,1);\gamma} =$$

$$= \int_R (((u \circ (T \circ \Lambda)^{-1})(\gamma + i\sigma, \cdot)))^2_{(s,-1,1)} \, d\sigma =$$

$$= \int_R (((u \circ (T \circ \Lambda)^{-1})(\gamma + i\sigma, \cdot)))^2_{s_1} \, d\sigma .$$

D'altra parte, se s_1 è un intero positivo pari, l'ultimo integrale scritto è equivalente a

$$\int_{]0,\delta^{(o)}] \times R^n_+} (t^{\gamma'} | u(t,x)|^2 + t^{\gamma'+s_1}(|\partial_t^{s_1/2} u(t,x)|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |\partial_{x_i}^{s_1} u(t,x)|^2))dt\, dx,$$

dove $\gamma' = \gamma - n/2 - 1$.

E' allora naturale procedere come segue.

Definizione 6.1. Siano $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\delta \in R_+$, $\sigma \in R$, X un sottoinsieme aperto di R^n; denotiamo con $K^s_\sigma(]0,\delta] \times X)$ lo spazio delle funzioni u tali che:

$$[u;\delta]^2_{s;\sigma} = \int_{]0,\delta] \times X} (t^{\sigma}|u(t,x)|^2 + t^{\sigma+2s}(|\partial_t^s u(t,x)|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} |\partial_{x_i}^{2s} u(t,x)|^2))dt\, dx < +\infty .$$

Gli spazi K^s_σ per $s \in R_+$ non intero sono definiti per interpolazione. In modo analogo sono definiti gli spazi di bordo se X è sufficientemente regolare.

<u>Definizione 6.2.</u> Sia $\delta \leq \delta^{(o)}$; denotiamo con $K^{(s/2;s,-1,1)}_\gamma(]0,\delta] \times \Omega)$ lo spazio delle funzioni u per le quali risulta

$$[u;0,\delta]^2_{(s,-1,1);\gamma} = ((\phi^{(o)}_1 u) \circ \Lambda^{-1})^{*2}_{(s/2;s,-1,1);\gamma} +$$

$$+ [\phi^{(o)}_2 u;\ \delta^{(o)}]^2_{s_1/2;\gamma-n/2-1} < +\infty .$$

In modo analogo vengono definiti gli spazi di bordo.

Dalla definizione degli spazi segue poi che, se $\gamma < 0$ è sufficientemente grande in modulo e $s \geq 1$, se $u \in K^{(s/2;s,-1,1)}_\gamma(]0,\delta] \times \Omega) \cap C^\infty([0,\delta] \times \Omega)$, risulta $u(0,x) \equiv 0$.

Per descrivere le proprietà degli spazi K e per utilizzarli per la risoluzione del problema (P) in $Q^{(o)}$, premettiamo alcuni risultati sugli spazi K.

<u>Proposizione 6.3.</u> Siano $\sigma_1, \sigma_2 \in R$, $\sigma_2 < \sigma_1$, $s \geq 0$; allora

$$[u;\delta]_{s,\sigma_1} \leq C\delta^{\sigma_1-\sigma_2}[u;\delta]_{s,\sigma_2}$$

$\forall u \in K^s_{\sigma_2}(]0,\delta] \times X)$.

<u>Preposizione 6.4.</u> Sia $\sigma \in R$;

i) se $s \geq 1$, l'applicazione $u \to \partial_t u$ è continua da $K^s_\sigma(]0,\delta] \times X)$ a $K^{s-1}_{\sigma+2}(]0,\delta] \times X)$;

ii) se $s \geq 1/2$, l'applicazione $u \to \partial_{x_i} u$ è continua da

$K^s_\sigma(]0,\delta] \times X)$ a $K^{s-\frac{1}{2}}_{\sigma+1}(]0,\delta] \times X)$, $i = 1,\dots,n$;

iii) se $\alpha \in S([0,\delta] \times X)$, l'applicazione $u \to \alpha u$ è continua da $K^s_\sigma(]0,\delta] \times X)$ in sè.

Preposizione 6.5. Siano $\sigma \in R$, $s > \frac{1}{2}$ e sia k il più grande intero minore di s-1/2; allora l'applicazione

$$u \to (\gamma_0 u,\dots,\gamma_k u)$$

è continua da $K^s_\sigma(]0,\delta] \times X)$ su $\prod_{j=0}^{k} K^{s-j/2-1/4}_{\sigma+j+1/2}(]0,\delta] \times \partial X)$.

Inoltre esiste un rilevamento continuo.

La dimostrazione della Proposizione 6.3 è immediata; le Proposizioni 6.4 e 6.5 vengono dimostrate utilizzando una caratterizzazione degli spazi K del tipo di quella introdotta da Triebel (cfr. ad es. [9]) per lo studio di spazi con peso. Lo stesso tipo di tecniche, insieme ai risultati classici per i problemi al contorno parabolici (cfr. ad es. [1]), ci permette di ottenere il seguente risultato.

Teorema 6.6. Siano $s \geq 1$, $0 < \delta \leq \delta^{(o)}$; allora $\exists\, \sigma_0 \in R$ tale che, se $\sigma < \sigma_0$, l'operatore $E = (\partial_t - P(t,x,\partial_x)) \oplus E_2$ è un isomorfismo tra $K^s_\sigma(]0,\delta] \times \Omega)$ e $K^{s-1}_{\sigma+2}(]0,\delta] \times \Omega) \times K^{s-k_2/2-1/4}_{\sigma+k_2+1/2}(]0,\delta] \times \partial\Omega)$. Di più la norma di E e di E^{-1} sono uniformemente limitate rispetto a δ appartenente a un intorno compatto dall'origine.

Tenendo ora presente che, su $]0,\delta^{(o)}] \times ((\overline{\Omega} \cap S(x_0,2\eta^{(o)})) \setminus S(x_0,\eta^{(o)}))$, gli spazi che vengono "incollati" coincidono, si hanno risultati analoghi alle Proposizioni 6.3, 6.4 e 6.5 per gli spazi K.

Utilizzando ora l'esistenza di un inverso per l'operatore A_1' negli spazi M e il Teorema 6.4, con un ragionamento analogo a quello fatto per dimostrare l'invertibilità di A_1', diminuendo eventualmente $\delta^{(o)}$,

si ha:

Teorema 6.7. Siano s,l come nel Teorema 4.2; allora $\exists\ \gamma_0 \in R$ tale che, se $\gamma \leq \gamma_0$, $\delta \leq \delta^{(o)}$, l'operatore A associato al problema (P) in $]0,\delta] \times \Omega$ è un isomorfismo da

$$K_\gamma^{(s/2;s,-1,1)}(]0,\delta] \times \Omega) \quad \text{su}$$

$$K_\gamma^{(s/2-1;s-2,-1,1)}(]0,\delta] \times \Omega) \times$$

$$\times \left(\mathop{X}_{i=1}^{2} K_\gamma^{((s-k_i-\frac{1}{2})/2;s-1-k_i-\frac{1}{2},1)}(([0,\delta] \times \overline{\Omega}) \cap \Gamma_i \right).$$

7. IL PROBLEMA (P) NELL'INTERO CILINDRO

Costruiamo ora un diffeomorfismo che "cilindrizza" la superficie di separazione γ lontano da $t = 0$. Questo diffeomorfismo, analogamente a quello costruito in [7], trasforma la parte superiore del cilindro in se stessa e non altera il tempo; permette inoltre di definire spazi funzionali che si "raccordano bene" con quelli definiti in uno strato vicino a $t = 0$.

Più precisamente si ha il risultato seguente.

Teorema 7.1. Siano $0 < t_0 < \delta_1 < \delta^{(o)}$; allora esiste un diffeomorfismo C^∞ $r_{t_0} : [t_0/2,T] \times \overline{\Omega} \to [t_0/2;T] \times \overline{\Omega}$ tale che:

i) $r_{t_0}([t_0/2,T] \times \partial\Omega) = [t_0/2,T] \times \partial\Omega$;

ii) $r_{t_0}(\gamma \cap ([t_0/2,T] \times \partial\Omega)) = [t_0/2,T] \times (\gamma \cap \{(t_0/2,x),\ x \in \partial\Omega\})$;

iii) $r_{t_0}(\{t\} \times \overline{\Omega}) = \{t\} \times \overline{\Omega},\ \forall t \in [t_0/2,T]$;

iv) $r_{t_o}/_{[t_o/2,\delta_1]\times \text{supp}\,\phi_1^{(o)}} =$

$$= (\Lambda^{-1} \circ L_{t_o} \circ T \circ \Lambda)/_{[t_o/2,\delta_1]\times \text{supp}\,\phi_1^{(o)}} ,$$

dove $L_{t_o}(\tau,\omega) = (e^{-2\tau}, \sqrt{t_o/2}\ \omega)$.

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 2.2 in [7]. La unica modifica è dovuta alla necessità di soddisfare la condizione iv) (che assicura il "buon raccordo" con gli spazi definiti nel primo strato). A tal fine, basta prendere come carta in un intorno di $[t_o/2, \delta_1 + \varepsilon] \times (\bar{\Omega} \cap S(x_o, 2\eta^{(o)}))$ l'applicazione $L_{to} \circ T \circ \Lambda$ e scegliere in modo opportuno la partizione dell'unità con la quale vengono "incollati" i diversi campi X_j.

A questo punto, possiamo definire una classe di spazi funzionali globali sul cilindro Q.

Con le notazioni introdotte in precedenza, poniamo

$$\zeta_j = \phi_j \circ L_{t_o}^{-1} \circ \Lambda \quad \text{(prolungata con zero su tutto } \bar{\Omega}\text{)}, \ j = 2,\dots,m,$$

$$\zeta_1 = 1 - \sum_{j=2}^{m} \zeta_j .$$

Inoltre poniamo

$$k_j(t,x) = (t,\ h_j(\sqrt{t_o/2}\ \psi(x))),\ j = 2,\dots,m,$$

dove ψ è tale che $\Lambda = 1_t \otimes \psi$ e h_j è stata introdotta nella Definizione 4.1.

<u>Definizione 7.2</u>. Sia $t_o/2 \le \alpha < \beta \le T$. Indichiamo con $\mathcal{R}_{(s/2;s,-1,1)}(]\alpha,\beta] \times \Omega)$ lo spazio delle funzioni u per le quali

$$\{u;\alpha,\beta\}^2_{(s/2;s,-1,1)} = \| \zeta_1(u \circ r^{-1}_{t_0}); H^{s_1/2,s_1}(]\alpha,\beta] \times \Omega)\|^2 +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m} \|(\zeta_j(u \circ r^{-1}_{t_0})) \circ k_j^{-1}; \alpha,\beta\|^2_{s_j/2;s_j,-1_j,1_j} < +\infty ,$$

dove le norme a secondo membro per $j = 2,\dots,m$ sono le norme in $H_{s_j/2;s_j,-1_j,1_j}(]\alpha,\beta] \times R^n)$ o in $H_{s_j/2;s_j,-1_j,1_j}(]\alpha,\beta] \times R^n_+)$ definite in [3] e in [7].

Questi spazi sono, in effetti, spazi analoghi a quelli considerati in [7] con una scelta opportuna delle carte k_j e della partizione dell'unità $\{\zeta_1,\dots,\zeta_m\}$.

E' importante osservare che, se $t_0/2 \leq \alpha < \beta \leq t_0$, gli spazi R e gli spazi K danno la stessa regolarità sullo strato $]\alpha,\beta] \times \Omega$, in forza della iv) dal Teorema 7.1.

Ciò giustifica la seguente

<u>Definizione 7.3.</u> Denotiamo con $\mathcal{Q}^{(s/2;s,-1,1)}_{\gamma}(Q)$ lo spazio delle funzioni u tali che

$$|[u]|^2_{(s/2;s,-1,1);\gamma} = [u; 0,t_0]^2_{(s,-1,1);\gamma} +$$

$$+ \{u; t_0/2, T\}^2_{(s/2;s,-1,1)} < +\infty .$$

Analogamente vengono definiti gli spazi di bordo.

Osserviamo che, se le condizioni al bordo non sono date da due operatori di Dirichlet ($k_1 = k_2 = 0$), possiamo scegliere s,l in modo che $s-1 \geq 1$; così i nostri spazi risultano immersi in quelli di Baiocchi (cfr. [2] e [7], Teorema 2.1).

Osserviamo ancora che gli spazi $\mathcal{Q}$ non dipendono dalla scelta del punto $t_o \in]0,\delta^{(o)}[$.

Osserviamo infine che, per i teoremi di traccia negli spazi $H_{s_j/2;s_j,-l_j,l_j;\gamma}$ e negli spazi K, per gli spazi $\mathcal{Q}$ sussiste un analogo risultato di esistenza e continuità delle tracce.

Relativamente al problema (P), abbiamo ora il seguente risultato.

<u>Teorema 7.4</u>. Siano $s \geqq 2$, $\gamma \in R_-$; allora l'operatore A associato al problema (P) è un isomorfismo tra $\mathcal{Q}_\gamma^{(s/2;s,-1,1)}(Q)$ e $\mathcal{Q}_{\gamma+2}^{((s-2)/2;s-2,-1,1)}(Q) \times \left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{2} \mathcal{Q}_{\gamma+k_i}^{((s-k_i-\frac{1}{2})/2;s-k_i-1-\frac{1}{2},1)}(\Gamma_i)\right)$ purché $|\gamma|$ sia sufficientemente grande.

La dimostrazione è analoga a quella di [1] per il caso parabolico ordinario (si veda anche la dimostrazione del Teorema 1.1 in [7]).

Sia $u^{(o)}$ una soluzione di (P) in $]0,t_o] \times \Omega$; $u^{(o)} \in K_\gamma^{(s/2;s,-1,1)}(]0,\delta\,] \times \Omega)$; sia poi $lu^{(o)}$ un prolungamento di $u^{(o)}$ in $\mathcal{Q}_\gamma^{(s/2;s,-1,1)}(Q)$. Per il Teorema 2.3 di [7], esiste una soluzione u_1 di $A\,u_1 = (f,g_1,g_2) - A(lu^{(o)})$, $u_1 \in \mathcal{R}_{(s/2;s,-1,1)}(]t_o/2,T] \times \Omega)$ che, prolungato con zero in $]0,t_o/2] \times \Omega$, appartiene ancora a $\mathcal{Q}_\gamma^{(s/2;s,-1,1)}(Q)$. Posto allora $u = lu^{(o)} + u_1$, u risulta soluzione del problema (P).

L'unicità segue poi utilizzando i risultati di unicità per (P) in $]0, t_o] \times \Omega$ e in $]t_o/2,T] \times \Omega$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.S. AGRANOVIČ, M.I. VIŠIK: Elliptic Problems with a Parameter and Parabolic Problems of General Type, Russian Math. Surveys, 19 (1964), n. 3, 53-157.

[2] C. BAIOCCHI: Sul problema misto per l'equazione parabolica del tipo del calore, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 36 (1966), 80-121.

[3] A. BOVE: Il problema misto per operatori ellittici del secondo ordine, Seminario di Analisi Matematica dell'Istituto Matematico della Università di Bologna, 1982.

[4] A. BOVE, B. FRANCHI, E. OBRECHT: A Boundary Value Problem for Elliptic Equations with Polynomial Coefficients in a Half Space, II: The Boundary Value Problem, Boll. Un. Mat. Ital., (5) 18-B (1981), 355-380.

[5] A. BOVE, B. FRANCHI, E. OBRECHT: Boundary Value Problems for Operators like $\Delta + x \cdot \nabla$, Rend. Mat., (7), 1 (1981), 94-120.

[6] V.A. KONDRAT'EV: Boundary Problems for Parabolic Equations in Closed Domains, Trans. Moscow Mat. Soc., 15 (1966), 450-504.

[7] E. OBRECHT: Problemi con condizioni laterali di tipo misto per equazioni paraboliche, Seminario di Analisi Matematica dell'Istituto Matematico dell'Università di Bologna, 1982.

[8] M.A. ŠUBIN: Operatori pseudodifferenziali e teoria spettrale (in Russo), Nauka, Mosca (1978).

[9] H. TRIEBEL: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North Holland, Amsterdam (1978).